

BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH HỮU HẠN

Nguyễn Trường Thanh

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học cơ bản

Mục lục

Lời mở đầu

Kiến thức cơ bản

Một vài kết quả về FTS

Kết luận

Lời mở đầu

- ▶ Năm 1953, khái niệm ổn định thời gian hữu hạn (FTS) được Kamenkov²⁹ giới thiệu lần đầu tiên trong một bài báo đăng trên tạp chí Nga, PMM (Tạp chí toán học ứng dụng và Cơ học).

Ổn định thời gian hữu hạn - Finite time stability (FTS)

Hệ phi tuyến $\dot{x} = f(x, t)$, được nói là ổn định thời gian hữu hạn (FTS) với bộ số (α, β, T) , $\alpha < \beta$ nếu

$$\|x(t_0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| < \beta, \forall t \in [t_0, t_0 + T).$$

²⁹Kamenkov G (1953) On stability of motion over a finite interval of time [in Russian]. Journal of Applied Math. and Mechanics (PMM) 17:529–540

Lời mở đầu

- ▶ Các bài viết liên quan khác xuất hiện ngay sau đó trong cùng một tạp chí, chẳng hạn như các bài báo của Lebedev [30] [38] [39] năm 1954 và Chzhan-Sy-In [8] [9] vào năm 1959.
- ▶ Tuy nhiên, phải đến khi một thảo luận về FTS xuất hiện trong bản dịch văn bản của Hahn, *Theorie und Anwendung der Direkten Methode von Ljapunov*, xuất bản năm 1963, rằng kết quả của Kamenkov và Lebedev được dịch sang tiếng Anh. Bản dịch PMM từ tiếng Nga sang tiếng Anh khởi xướng năm 1958, đã hoàn thành kết quả của Chzhan-Sy-In năm 1959 đến độc giả tiếng Anh.
- ▶ Những bài báo đầu tiên của các tác giả Nga về FTS đã giải quyết cho nhiều hệ tuyến tính và hệ phi tuyến.

Lời mở đầu

- ▶ Năm 1961, một số nghiên cứu về FTS cho các hệ thống tuyến tính có trễ biến thiên, chẳng hạn như những bài báo của Dorato [11] [12] [13], dưới tiêu đề, sự **ổn định trong thời gian ngắn**. Thuật ngữ **ổn định trong thời gian ngắn**, cũng được sử dụng trong các văn bản của D'Angelo [10] và Richards [44] cho sự ổn định theo thời gian hữu hạn.
- ▶ Năm 1961, khái niệm liên quan đến **sự ổn định thực tế** đã được giới thiệu trong văn bản của LaSalle và Lefschetz [37].

Ổn định thời gian hữu hạn và **ổn định thực tế**, có điểm chung đặc điểm kỹ thuật của giới hạn, nhưng **khác nhau** về kích thước của khoảng thời gian quan tâm. Văn bản của Lakshmikantham, Leela và Martynyuk [35] đề cập chi tiết về sự ổn định thực tế, trong khi nhiều bài báo đã được xuất bản là sự kết hợp của FTS và sự ổn định thực tế. Xem, ví dụ, [41], [42], [19], và [20].

Lời mở đầu

- ▶ Năm 1965, Weiss và Infante [53] đã công bố rất đầy đủ về FTS cho các hệ phi tuyến, bao gồm cả khái niệm về sự ổn định có thời gian hữu hạn. Ngay sau đó Weiss và Infante đã xuất bản một phần mở rộng của FTS cho các hệ thống phi tuyến với sự hiện diện của tín hiệu nhiễu loạn [52], dẫn đến khái niệm ổn định BIBO thời gian hữu hạn, thường được gọi là giới hạn thời gian hữu hạn (FTB) ổn định [6].
- ▶ Năm 1966, Kushner [34] đã nghiên cứu khái niệm FTS cho hệ thống ngẫu nhiên, chi tiết hơn được trình bày trong Chương III của văn bản của ông về ổn định và điều khiển Stochastic [33].
- ▶ Năm 1969, Michel và Wu [43] mở rộng nhiều kết quả hiện có trên FTS trong hệ thống thời gian liên tục cho hệ thống thời gian rời rạc. Từ 1965-1975, rất nhiều kết quả FTS đã xuất hiện, ví dụ: [28], [32],

Tuy nhiên, tất cả các kết quả này được giới hạn trong phân tích hệ thống nhất định, thay vì thiết kế điều khiển / tổng hợp.

Lời mở đầu

- ▶ Năm 1969, Garrard [17] đã trình bày một bài báo tại Đại hội IFAC lần thứ 4 về tổng hợp hệ thống điều khiển thời gian hữu hạn cho các hệ phi tuyến, hơn nữa mở rộng thành một bài báo [18] vào năm 1972.
- ▶ Năm 1972, một bài báo khác của Van Mellaert và Dorato [48] xuất hiện trên thiết kế FTS. Bài viết này thiết kế cho các hệ thống ngẫu nhiên, dựa trên luận án tiến sĩ của tác giả đầu tiên, xuất hiện vào năm 1967 [47].

Lời mở đầu

- ▶ Nghiên cứu đã được công bố bởi San Filippo và Dorato [45] về **thiết kế bền vững của các hệ thống tuyến tính** với một hiệu suất tuyến tính bậc hai và FTS, được **áp dụng cho một bài toán điều khiển chuyển bay, dựa trên luận án tiến sĩ của tác giả đầu tiên, San Filippo, xuất bản năm 1973 [46]**.
- ▶ Trong một bài báo hội thảo, Grujic [21] đã áp dụng các khái niệm FTS đến việc thiết kế các hệ thống thích ứng (xem thêm Grujic [22]).

Hầu hết các thiết kế các kỹ thuật được trình bày trong giai đoạn 1969-1976 được chuyên sâu tính toán rất nhiều. Mãi đến gần đây, các thuật toán thiết kế có thể tính toán được báo cáo, ít nhất là cho các hệ thống tuyến tính.

Lời mở đầu

- ▶ Năm 1997, Dorato, Abdallah và Famularo [16] đã trình bày một nghiên cứu tại IEEE CDC thứ 36, về thiết kế FTS bền vững cho các hệ thống tuyến tính, sử dụng bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI) để tính toán các luật kiểm soát phản hồi trạng thái. Thêm nữa, kết quả thiết kế dựa trên LMI cho các hệ thống tuyến tính đã được trình bày trong Amato và cộng sự [5], [2], [3] và [6].
- ▶ Năm 2002, Abdallah và cộng sự trình bày kỹ thuật thống kê để thiết kế FTS với phản hồi đầu ra tĩnh. Gần đây, các kỹ thuật thiết kế FTS với thời gian rời rạc đã được áp dụng để kiểm soát mạng ATM và đến các hệ thống mạng được kiểm (xem Amato et al. [1] và Mastellone [40]).

Kiến thức cơ bản

Các khái niệm **ổn định cổ điển**, ví dụ, ổn định Lyapunov, ổn định tiệm cận, ổn định bị chặn đầu vào và đầu ra (BIBO), tất cả đều liên quan đến các hệ thống **vận hành trong một khoảng thời gian vô hạn**. Ngoài ra, trong khi các khái niệm ổn định cổ điển yêu cầu các biến hệ thống bị chặn, các giá trị của chặn không bị ràng buộc. Thuật ngữ *ổn định thực tế* đã được giới thiệu cho các hệ thống hoạt động trong một khoảng thời gian vô hạn với giới hạn quy định, trong văn bản của LaSalle và Lefschetz [37], được xuất bản năm 1961.

Kiến thức cơ bản

Tuy nhiên, trước đó (1953-1954), nhiều bài báo đã được xuất bản bằng tiếng Nga, ví dụ, [29], [38], liên quan đến cả giới hạn ràng buộc và khoảng thời gian hữu hạn, dưới tiêu đề ổn định thời gian hữu hạn. Thuật ngữ ổn định thời gian ngắn cũng đã được sử dụng cho ổn định thời gian hữu hạn, xem, ví dụ, [11], nhưng thuật ngữ phổ biến hơn trong tài liệu này vẫn là ổn định thời gian hữu hạn. Cần lưu ý rằng thuật ngữ ổn định thời hạn hữu hạn, với một ý nghĩa rất khác so với điều được xem xét ở đây, cũng đã xuất hiện trong tài liệu, ví dụ, [26], [7]. Trong các ấn phẩm sau này, thuật ngữ FTS được sử dụng để mô tả các hệ thống có trạng thái tiến tới 0 trong một thời gian hữu hạn.

Kiến thức cơ bản

Tiếp theo chúng tôi tóm tắt một số định nghĩa ổn định cổ điển và ổn định thời gian hữu hạn.

Ổn định Lyapunov [25]

Điểm cân bằng, $x_e = 0$, của hệ thống $\dot{x} = f(x, t)$, được nói là ổn định Lyapunov nếu với mỗi $\beta > 0$, tồn tại $\alpha(\beta, t_0) > 0$ sao cho

$$\|x(t_0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| < \beta, \forall t \geq t_0.$$

Kiến thức cơ bản

Ổn định thực tế [37]

Điểm cân bằng, $x_e = 0$, của hệ thống $\dot{x} = f(x, t) + p(x, t)$, được nói là *ổn định thực tế* cùng với các tập Q_0, Q và biến thực $\delta > 0$, nếu

$$x(t_0) \in Q_0 \text{ and } \|p(x, t)\| \leq \delta \Rightarrow x(t) \in Q, \forall t \geq t_0.$$

Lưu ý rằng trái ngược với sự ổn định của Lyapunov, sự ổn định thực tế đòi hỏi rằng bộ Q_0 và Q được quy định độc lập. Những bộ này thường được xác định từ những cân nhắc thực tế.

Kiến thức cơ bản

Ổn định thời gian hữu hạn [29]

Hệ phi tuyến $\dot{x} = f(x, t)$, được nói là ổn định thời gian hữu hạn (FTS) với bộ số (α, β, T) , $\alpha < \beta$ nếu

$$\|x(t_0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| < \beta, \forall t \in [t_0, t_0 + T).$$

Lưu ý rằng trái ngược với sự ổn định thực tế, FTS được xác định theo khoảng thời gian hữu hạn. Ngoài ra FTS được định nghĩa liên quan đến một chuẩn cụ thể và thời gian ban đầu. Như đã đề cập trước đó, thuật ngữ *ổn định thời gian ngắn* cũng đã được sử dụng cho FTS, xem, ví dụ, Dorato [11], DiênAngelo [10] và Richards [44]. Tuy nhiên, vì tất cả các hệ thống thực sự hoạt động trong khoảng thời gian hữu hạn, tuy nhiên, thuật ngữ *thời gian ngắn* giúp phân biệt giữa định nghĩa cổ điển và FTS. Cuối cùng, lưu ý rằng đối với FTS, tập hợp các trạng thái ban đầu có thể bao gồm các điểm cân bằng khác không.

Kiến thức cơ bản

Ổn định hữu hạn co [43]

Hệ phi tuyến $\dot{x} = f(x, t)$ được nói là ổn định hữu hạn co với bộ số $(\alpha, \beta, \gamma, T)$ nếu hệ là ổn định hữu hạn với bộ số (α, γ, T) , và tồn tại $t_1 \in (t_0, t_0 + T)$ sao cho

$$\|x(t)\| < \beta, \quad t_1 < t < t_0 + T, \quad \text{với } \beta < \alpha.$$

Kiến thức cơ bản

Ổn định nhiễu hoặc bị chặn hữu hạn (FTB) [52]

Hệ phi tuyến $\dot{x} = f(x, t) + u(x, t)$ được nói là ổn định nhiễu hoặc bị chặn hữu hạn (FTB) [6] với bộ số dương $(\alpha, \beta, \varepsilon, T)$ nếu

$$\|x(t_0)\| < \alpha \text{ và } \|u(x, t)\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|x(t)\| < \beta, \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Trong D'Angelo [10], thuật ngữ không đáp ứng thời gian ngắn được sử dụng cho FTB trong hệ thống tuyến tính. Một biến thể trong Định nghĩa 5, liên quan đến định nghĩa được đưa ra trong [52], đó là nhiễu, $u(x, t)$, được giả sử là bị chặn đều bởi ε và tất cả x và t . Giả định này làm cho các định nghĩa trong [52] và [6] tương thích.

Kiến thức cơ bản

Ổn định ngẫu nhiên hữu hạn (FTSS) [34]

Hệ thống phi tuyến ngẫu nhiên, $dx = f(x)dt + \sigma(x)dz$, trong đó z là quá trình Wiener, được nói là ổn định ngẫu nhiên hữu hạn (FTSS) với bộ $(Q_1, Q_2, 1 - \lambda, T)$, trong đó Q_1, Q_2 là hai tập cho trước, λ, T , là hai số dương cho trước, $\lambda < 1$, nếu

$$x(0) \in Q_1 \Rightarrow \Pr\{x(t) \in Q_2, 0 \leq t \leq T\} \geq 1 - \lambda.$$

Xác suất $x(t) \in Q_2$ trong khoảng $[0, T]$ có nhiều tên; nó được Van Mellaert [47] gọi là xác suất bao gồm và Wonham (Phần VII-B của [54]) gọi là xác suất ngăn chặn.

Một vài kết quả về FTS

[11]

Hệ tuyến tính $\dot{x} = A(t)x$, là FTS với bộ (α, β, T) , nếu

$$\int_{t_0}^t \lambda_{\max}(A(t)^T + A(t)) dt \leq 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T).$$

Một vài kết quả về FTS

Weiss và Infante [52]

Hệ phi tuyến $\dot{x} = f(x, t) + u(x, t)$ là ổn định nhiễu với bộ $(\alpha, \beta, \varepsilon, T)$, nếu tồn tại hàm số thực $V(x, t)$ và các hàm thực khả tích $\phi(t), \rho(t)$ trên đoạn thẳng J sao cho

1. $\left\| \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right\| \leq \rho(t), \forall x \in R, t \in J;$
2. $\dot{V}_f(x, t) < \phi(t), \forall x \in R, t \in J;$
3. $\int_{t_1}^{t_2} [\phi(t) + \varepsilon \rho(t)] dt \leq V_m^\beta(t_2) - V_M^\alpha(t_1), t_1, t_2 \in J,$

trong đó

$$J = [t_0, t_0 + T), R = \{x : \alpha < \|x\| \leq \beta\},$$

$$V_f(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t},$$

$$V_M^\alpha(t) := \max_{\|x\|=\alpha} V(x, t), V_m^\alpha(t) := \min_{\|x\|=\alpha} V(x, t).$$

Một vài kết quả về FTS

Nếu $\varepsilon = 0$, định lý trên cung cấp một kết quả cho FTS (Định nghĩa 3). Lưu ý rằng hàm $V(x, t)$ trong định lý này, không giống như các hàm Lyapunov cổ điển, không bắt buộc phải xác định dương. Ngoài ra, \dot{V} không bắt buộc phải nửa xác định âm. Một định lý tương tự Định lý 2 là đưa ra trong [43] cho các hệ thống thời gian rời rạc. Ngoài ra, trong [14], Định lý 2 được áp dụng cho hệ thống tuyến tính có dạng, $\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t)$, trong đó $u(t)$ là nhiễu vô hướng, giới hạn bởi ε . Tuy nhiên, có một lỗi trong kết quả được nêu trong [14]: hàm $\rho(t)$ phải là 2β và $\varepsilon\rho(t)$ trong Phần 3 của Định lý 2 nên được thay thế bằng $\varepsilon\Lambda_b^{1/2}(t)(2\beta)$. Các điều kiện cho sự ổn định (phương trình (3) trong [14]) nên là

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Lambda_A(t)\beta^2 + 2\varepsilon\Lambda_b^{1/2}(t)\beta) dt \leq \beta^2 - \alpha^2.$$

Một vài kết quả về FTS

Kushner[34]

Hệ phi tuyến ngẫu nhiên, $dx = f(x)dt + \sigma(x)dz$, là FTSS với bộ $(Q_1, Q_2, 1 - \lambda, T)$, nếu tồn tại hàm liên tục không âm $V(x)$, sao cho $\mathbb{A}V(x) \leq \phi(t)$, $\forall x \in Q_2$ và

$$\frac{V(x) + \int_0^T \phi(t)dt}{q_2} \leq \lambda, \quad \forall x \in Q_1,$$

trong đó \mathbb{A} là toán tử sinh

$$\mathbb{A} = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + 1/2 \sum \sum S_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$Q_1 = \{x : V(x) < q_1\}, \quad Q_2 = \{x : V(x) < q_2\}, \quad S_{ij} = \sum_k \sigma_{ik} \sigma_{jk}.$$

Một vài kết quả về FTS

Trong [34], các điều kiện cũng được đưa ra cho các hệ thống thời gian rời rạc là ổn định ngẫu nhiên thời gian hữu hạn. Định lý trên là một kết quả về FTS, về cơ bản yêu cầu tính bị chặn của các hàm phi tuyến trên một tập đã cho. Đối với thiết kế điều khiển, một tín hiệu thiết kế phải được giới thiệu trong các phương trình hệ thống; ví dụ: hệ phi tuyến cần được viết, $\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u$ trong đó u là một tín hiệu điều khiển (không bị nhầm lẫn với thuật ngữ nhiễu loạn $u(x, t)$ trong Định nghĩa 5).

Kết luận

Báo cáo trình bày tổng quan bài toán ổn định hữu hạn về lịch sử, một số khái niệm và kết quả cơ bản cho hệ tuyến tính, phi tuyến và ngẫu nhiên.

Những lĩnh vực sử dụng kết quả nghiên cứu

- ▶ hệ thống tên lửa, cơ động nhất định máy bay,
- ▶ mạng lưới thông tin liên lạc, điều động robot, .v.v.

Một số vấn đề nghiên cứu trong tương lai

Những kết quả trong báo cáo là cơ bản. Tác giả sẽ tiếp tục giới thiệu nhiều kiến thức và phương pháp nghiên cứu hơn trong nhiều báo cáo sau. Mục đích của tác giả, nhằm đưa ra một cách có hệ thống bài toán ổn định hữu hạn. Đặc biệt, nếu nhận được sự hỗ trợ của Nhà trường về mặt kinh tế cũng như chính sách, sẽ khích lệ tác giả và các cộng sự đưa ra nhiều kết quả tốt hơn trong tương lai.